数理解析研究所講究録
576巻 1985年 121-128

$P^n(\mathbb{C})$ 内の定曲率極小曲面

東北大教養部　劔持勝衛
(Katsuei Kenmotsu)

$P^n(\mathbb{C})$ を n 次元複素射影空間とし，一定な正則断面曲率 4 をもつ Fubini-Study 計量を考える。$P^2(\mathbb{C})$ 内の実2次元のガウス曲率一定な極小曲面として，以下の例がある：

(1) $P^1(\mathbb{C}) = \left\{ [Z] \in P^2(\mathbb{C}),\ Z = (z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid z_2 = 0 \right\}$.

これは，$P^2(\mathbb{C})$ 内で複素解析的かつ全測地的で，そのガウス曲率 $K \equiv 4$ である。

(2) $Q_1 = \left\{ [Z] \in P^2(\mathbb{C}) \mid z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0 \right\}$.

これは，$P^2(\mathbb{C})$ 内で複素解析的であるが，全測地的でない極小曲面で，そのガウス曲率 $K \equiv 2$ である。

(3) $P^2(R) = \left\{ [Z] \in P^2(\mathbb{C}) \mid \bar{z}_a = z_a,\quad a = 0, 1, 2 \right\}$.

これは，$P^2(\mathbb{C})$ 内で全実的（totally real）かつ全測

地的であって，$K \equiv 1$ である。

(4)　$CT = \{ [Z] \in P^2(\mathbb{C}) \mid |z_0|^2 = |z_1|^2 = |z_2|^2 \}$，この曲面は1975年に Ludden, 奥村, 矢野 [8] によって発見されたもので次の性質をもつ：CT は，全実的，全測地的でない極小曲面で，$K \equiv 0$．逆にこれらの性質をもつものは CT に限る。実際，R^6内の単位球面を $S^5(1)$ として，Hopf の fibration を考えると，CT の horizontal lift は，$(\theta, \tau) \in R^2$，$X = \frac{1}{\sqrt{3}}(e^{i\theta}, e^{i\tau}, e^{-i(\theta+\tau)}) \in S^5(1) \subset R^6$．これは，トーラスから $S^5(1)$ への minimal immersion を定義する。Xが$S^5(1)$ 内の極小曲面で且 horizontal なので，その射影と一致する CT も極小であって，平坦である．CTが全実的であることは，$\langle \sqrt{-1} X_\theta, X_\tau \rangle = 0$ からわかる，ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{C}^3 \cong R^6$ のユークリッド内積で，$(\ ,\ )$ を $\mathbb{C}^3$ のエルミート内積とするとき，$\langle Z, W \rangle = Re(Z, W)$，$(Z, W) = \sum_{A=0}^{2} z_A \overline{w_A}$．

一般に R^2を標準計量をもつユークリッド平面として，

$$\{ X : R^2 \longrightarrow S^5(1) \mid \text{flat な minimal immersion} \}$$

は，2-パラメーターの族をなす [5] ので，他の X で

horizontal なものがあるかもしれない。しかしそれはない。もっと一般に次が成立する。

定理1. $M^2(K)$をガウス曲率一定(=K)な実2次元リーマン多様体とし，$x: M^2(K) \longrightarrow P^2(\mathbb{C})$ を isometric minimal immersion とする。そのとき，xは先きの(1)～(4)のいずれかと局所的に一致する。特に $K<0$ なる $P^2(\mathbb{C})$ 内の極小曲面は存在しない。

証明は，Chern & Wolfson [4] で定義された$M^2(K)$上の関数 $\sin\alpha$ のラプラシアンと勾配ベクトルの大きさを計算して，K. Kenmotsu [6] と同じ方法を使えば，このようなxは，複素解析的か又は全実的かのいずれかしかおきないことがわかり，すでに知られている分類定理により定理1の結論がみちびかれる。

問題1. 上の定理1における$P^2(\mathbb{C})$を$P^n(\mathbb{C})$へおきかえた時，同じような事が成立するか？

これについては，つい最近東北大の坂東，大仁田の両君[1]によって，$M^2(K)$がS^2に位相同形な場合は，その分類が終了した。$K \leqq 0$の場合が未解決であるが，これをとくための一つの準備として，次の問題2が考えられる。

問題2. $P^n(\mathbb{C})$での, CT の一般化はなにか?

この問題2に答えるのが, 本稿の主目的である。

定理2. R^2をユークリッド平面とし, その標準計量を $ds^2 = du^2 + dv^2$ とする. $x : R^2 \longrightarrow P^n(\mathbb{C})$ を全実的な, 等長的極小埋入とし, 更に $x(R^2)$は $P^n(\mathbb{C})$内で full と仮定する. そのとき, (1) xは次の意味で homogeneous; (i.e., $U(n+1)$のあるアーベル部分群 G が存在して, $x(R^2) = G \cdot Z_0$ とかける), (2) xの同値類の集合は, 実 $2(n-2)$ 次元の族をなす.

証明の方針. 都合のよい動標構をえらぶことにより, このようなxを具体的に全て求めてみる。そのために, $\{e_1, e_2\}$ を $x(R^2)$の, 局所的に定義された, 向きづけされた, orthonormal tangent frame; Jを $P^n(\mathbb{C})$の概複素構造とする. xが全実的なので, Je_1, Je_2はxに沿って法ベクトル場. 従って $E_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - Je_2)$, $E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + Je_2)$ は, $x(R^2)$上のユニタリー標構である. $\{E_\alpha, 1 \leq \alpha \leq n\}$ を上の E_1, E_2 を含む $P^n(\mathbb{C})$の局所ユニタリー標構とする. E_αの双対形式を ω_α, e_1, e_2の双対形式を θ_1, θ_2 とし, $\phi = \theta_1 + \sqrt{-1}\,\theta_2$ とおく. その時次が成立する:

$$(1) \quad \cdots\cdots \quad \begin{cases} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi, & w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\phi}, \\ w_\lambda = 0, \quad 3 \leq \lambda \leq n, & \text{along } \quad x(R^2). \end{cases}$$

以後，$\phi = du + \sqrt{-1}\,dv$ とおく．これに対して，その双対基を e_1, e_2 ; E_α 等を定義する．$w_{\alpha\beta}$ を w_α に関しての ユニタリー 接続 形式とする．Chern & Wolfson [4] によって，x が 極小であるための必要十分条件は，次の(2)式をみたす局所的に定義された関数 $a, c, a_\lambda, c_\lambda$ が存在することである：

$$(2) \quad \cdots\cdots \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(w_{11} + w_{22}) = a\phi, & w_{12} = c\overline{\phi}, \\ w_{\lambda 1} = \sqrt{2}\,a_\lambda \phi, & w_{\lambda 2} = \sqrt{2}\,c_\lambda \overline{\phi}, \quad (\lambda \geq 3). \end{cases}$$

$\phi = du + \sqrt{-1}\,dv$ の特殊性を使って，(1), (2) の外微分から

$$(3) \quad \cdots\cdots \quad \begin{cases} a \equiv 0, \quad w_{11} = w_{22} = 0, \quad |c|^2 = \text{一定}; \\ \sum |a_\lambda|^2 = \sum |c_\lambda|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - |c|^2\right) \end{cases}$$

を得る．次の補題を証明しよう：

補題． $\sum a_\lambda \overline{c_\lambda} = \text{一定}$．

証明． $\sum a_\lambda \overline{c_\lambda}$ は，ユニタリー標構 E_λ $(\lambda \geq 3)$ のとり方に独立であるので，R^2 上の関数である。

構造方程式から，$\sum a_\lambda \overline{c_\lambda}$ は正則的（holomorphic）であることがわかる．一方 $|\sum a_\lambda \overline{c_\lambda}|^2 \leqq (\sum |a_\lambda|^2)^2 = \frac{1}{4}(\frac{1}{2} - |c|^2)^2 < \infty$ より，上に有界．Liouville の定理から，補題は示された．

(3)式とこの補題から，

(4) …. xの 2nd osculating space の次元 ＝ 一定

がわかる。従って，もし $n \geqq 4$ ならば，E_3, E_4 を適当にとることにより，

$$w_{11} = 0,\quad w_{12} = c_1\overline{\phi},\quad w_{13} = k_1\overline{\phi},\quad w_{14} = \cdots = w_{1n} = 0,$$
$$w_{22} = 0,\quad w_{23} = k_1 c_{2,3}\phi,\quad w_{24} = k_1 c_{2,4}\phi,\quad w_{25} = \cdots = w_{2n} = 0,$$
$$w_{33} = -c_1 c_{2,3}\phi + \overline{c_1 c_{2,3}\phi},\qquad w_{34} = c_{2,4}(-c_1\phi + c_2\overline{\phi}),$$
$$w_{44} = \overline{c_2 c_{2,3}}\phi - c_2 c_{2,3}\overline{\phi},\qquad k_1^2 + |c_1|^2 = \frac{1}{2},$$
$$|c_{2,3}|^2 + c_{2,4}^2 = 1,\qquad \frac{\rho}{2} - |c_2|^2 \geqq 0,$$

とできる．ここで c_1 と $c_{2,3}$ の 2つの複素数の自由度があることと，この微分式系に現われた全ての係数は定数であることを注意しておく。同様なことが高次の osculating space に対しても成立し，

(5) ….. 任意の α, β, $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ に対して，$w_{\alpha\beta}$ は ϕ と $\overline{\phi}$ の定数係数の1次結合で，$(n-2)$コの複素数で定まる．

この全微分方程式系を具体的に解いて，定理2を証明することができる。詳しくは，Kenmotsu［7］を参照のこと。

定理2で得られた$P^n(\mathbb{C})$内の完備平坦な極小曲面の族の特徴付けとして，次が成立する。

定理3．M^2を連結で完備な2次元リーマン多様体とし，等長的極小埋入$x: M^2 \longrightarrow P^n(\mathbb{C})$の才2基本形式の長さの2乗がいたるところ2以下であるとする。そのとき，(1) xは superminimal か又は，(2) xは全実的で，$K \equiv 0$.

証明．$\cos\alpha = \langle e_1, Je_2 \rangle$とおくと，$\sin\alpha \cdot C \neq 0$なら，$\Delta \log|\sin\alpha \cdot C| = 12K$がわかる．一方定理3の仮定より，$K \geqq 3\cos^2\alpha \geqq 0$となり，定理3は Huberの定理より証明される．

注意．大仁田の構成した例から，(1)をみたすものが存在する。$n=2$でxが更に全実的と仮定すれば，この定理3は Chen & 荻上 [3]，Ludden, 奥村 & 矢野 [8] の定理に他ならぬ。

問題3．定理2は，R^2の完備性の仮定なしで成立するか？（$S^n(1)$内での類似な問題は，最近 Bryant [2] によって肯定的にとかれた。）

References

(1) S.Bando & Y.Ohnita, Preprint.

(2) R.Bryant, Minimal surfaces of constant curvature in S^n, Trans.A.M.S., 290(1985), 259-271.

(3) B.Y.Chen & K.Ogiue, On totally real submanifolds, Trans.A.M.S., 193(1974), 275-266.

(4) S.S.Chern & J.G.Wolfson, Minimal surfaces by moving frames, Amer.J.M., 105(1983), 59-83.

(5) K.Kenmotsu, On minimal immersions of R^2 into S^N, J.Math. Soc.Japan, 28(1976), 182-191.

(6) __________, Minimal surfaces with constant curvature in 4-dimensional space forms, Proc.A.M.S., 89(1983), 133-138.

(7) ________, On minimal immersions of R^2 into $P^n(C)$, J. Math.Soc.Japan, 37(1985), 665-682.

(8) G.D.Ludden, M.Okumura & K.Yano, A totally real surface in CP^2 that is not totally geodesic, Proc.A.M.S., 53(1975), 186-190.